第十章　Fourier 分析

在前一章, 我们讨论了函数项级数, 并把幂级数作为重要的特殊函数项级数加以讨论. 为了研究周期现象, 下面我们研究另一类特殊的函数项级数.

§1　Fourier 级数

函数列

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

称为三角函数系, 有限和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角多项式, 而形式和

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为三角级数, 其中 a_0, a_k, b_k 等称为该三角级数的系数.

三角函数都是周期为 2π 的函数. 一个自然的问题是, 如果 f 是一个周期为 2π 的函数, 能否用三角多项式去逼近它? 为了讨论这一问题, 以下我们假定 f 总是 Riemann 可积或反常绝对可积的函数.

定义 (Fourier 系数)　设 f 为 $[-\pi, \pi]$ 上的 Riemann 可积函数, 周期为 2π. 令

$$a_0 = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x,$$
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x, \quad k = 1, 2, \cdots$$

a_0, a_k, b_k 称为 f 的 Fourier 系数, 形式和

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

称为 f 的 Fourier 级数或 Fourier 展开, 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

注 (1) 如果 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ 一致收敛, 则由逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = a_0\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin b_x \mathrm{d}x\right) = a_0\pi$$

同理,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos kx\mathrm{d}x + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\mathrm{d}x + b_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx\mathrm{d}x\right) \\ &= 0 + a_k \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx\mathrm{d}x + 0 = a_k\pi\end{aligned}$$

对于 b_k 有类似结果, 这就是为什么我们要象前面那样定义 Fourier 系数.

(2) 简单的观察表明, 如果 f 为奇函数, 则 $a_k = 0$ $(k \geq 0)$, 此时的 Fourier 展开称为正弦级数; 如果 f 为偶函数, 则 $b_k = 0$ $(k \geq 1)$, 此时的 Fourier 展开称为余弦级数的.

例 1 设 f 为 2π 周期函数, 且

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x = 0, \pm\pi, \\ -\frac{1}{2}, & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

求 f 的 Fourier 展开.

解 f 为奇函数, 因此 $a_k = 0$. 而

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\left[\int_0^{\pi} \sin kx\mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{0} \sin kx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{k\pi}[1-(-1)^k]\end{aligned}$$

因此就得到了 f 的 Fourier 展开:

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

例 2 设 f 为 2π 周期函数, 且 $f(x)=x^2, -\pi \le x \le \pi$, 求 f 的 Fourier 展开.

解 f 为偶函数, 故 $b_k=0$, 而

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{T_1} x^2\cos kx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{2}{k}x\sin kx\mathrm{d}x \quad (\text{分部积分}) \\ &= (-1)^k\frac{4}{k^2} \quad (k>0) \\ a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2 \end{aligned}$$

这就得到了 f 的 Fourier 展开:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}(-1)^k.$$

为了研究 Fourier 展开的收敛性, 我们需要对系数 a_k, b_k 做一些估计.

定理 1 (Riemann-Lebesgue) 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或反常绝对可积, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x = 0.$$

证明 $\forall\, \varepsilon>0$, Riemann 可积或反常绝对可积的函数 f 可用阶梯函数逼近, 即存在阶梯函数 g, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

此时,

$$\left|\int_a^b f(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

因此, 只要对阶梯函数证明结论即可, 进而只要对 $[c,d]\subset[a,b]$ 上的常值函数证明即可: 如果 $f=\mu$, 则

$$\begin{aligned} \left|\int_c^d \mu\cos\lambda x\mathrm{d}x\right| &= \left|\mu\cdot\int_c^d\cos\lambda d\mathrm{d}x\right| = \left|\mu\cdot\frac{1}{\lambda}(\sin\lambda d-\sin\lambda c)\right| \\ &\le \frac{2|\mu|}{\lambda} \to 0, \quad (\lambda\to+\infty). \end{aligned}$$

对 $\sin\lambda x$ 有完全类似的证明.

推论 f 的 Fourier 系数 $a_k\to 0$, $b_k\to 0$ $(k\to+\infty)$. 这说明, 周期函数作 Fourier 展开时, 其高频分量的振幅是很小的.

如果 f 有更好的光滑性, 则其系数有更好的估计. 例如, 设 $f\in C^1[-\pi,\pi]$, 且 $f(-\pi)=f(\pi)$, 则

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\
&= -\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x=o(\frac{1}{n}),\ \ (\mathrm{Riemann-Lebesgue})
\end{aligned}$$

同理, $b_n=o(\frac{1}{n})$. 一般地, 设 $f\in C^k([-\pi,\pi])$, $f^{(i)}(-\pi)=f^{(i)}(\pi)$, $i\le k-1$, 则

$$a_n=o(\frac{1}{n^k}),\quad b_n=o(\frac{1}{n^k}).$$

§2 Fourier 级数的收敛性

在前一节我们已看到, 如果 $f\in C^2[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$, $f'(-\pi)=f'(+\pi)$, 则其 Fourier 系数满足估计 $a_n=o(\frac{1}{n^2})$, $b_n=o(\frac{1}{n^2})$, 因而 Fourier 展开一致收敛. 本节研究一般情形下 Fourier 级数的收敛性.

记

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx.$$

利用

$$\sin\frac{1}{2}x\cos kx=\frac{1}{2}\left[\sin(k+\frac{1}{2})x-\sin(k-\frac{1}{2})x\right]$$

我们得到下面的等式

$$\sigma_n(x)=\frac{\sin(\pi+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x},\ x\neq 2k\pi.$$

当 $x=2k\pi$ 时, 规定 $\sigma_n(x)=n+\dfrac{1}{2}$, 这样得到的 σ 为连续函数, 且

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

应用 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$

首先, 此积分是收敛的, 我们可用 Cauchy 准则判断如下: 设 $B>A$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_A^B\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right| &= |\frac{-\cos x}{x}|_A^B+\int_A^B\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x| \\ &\le \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\int_A^B\frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{2}{A}\to 0,\quad A\to+\infty.\end{aligned}$$

记 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}I &= \lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\mathrm{d}x \qquad (x\to(n+\frac{1}{2})x) \\ &= \frac{\pi}{2}+\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}})\cdot\sin(n+\frac{1}{2})x\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}. \qquad (\mathrm{Riemann-Lebesgue})\end{aligned}$$

其中, 因为

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}})=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\cdot\sin\frac{x}{2}}=0,$$

故 $\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\in C^0[0,\pi]$, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

设 f 的 Fourier 级数部分和为 $S_n(x)$, 则

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\sum_{K=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\cos kx\mathrm{d}t+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\sin kx\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{K=1}^{n}(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{K=1}^{n}\cos k(t-x)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+u)\sigma_n(u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

其中最后一个等式用到了变量代换 $u = t - x$, 并且利用了被积函数的周期性, 即在 $[-\pi - x, \pi - x]$ 上的积分等于在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分. 我们可以进一步改写为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u$$

注意到, $\forall\, \delta > 0$, 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \\ &\quad + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_\delta^\pi \frac{f(x+u)+(f-u)}{2\sin\frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

因此, $S_n(x)$ 的收敛性只和 f 在 x 附近的性态有关, 这是 Riemann 的发现, 有时称为 Riemann 局部化原理.

定理 1 (Dini 判别法) 设 f 如前. 如果 $\exists\, \delta > 0$, 使得

(1) f 在 x 处的右极限 $f(x_+)$ 和左极限 $f(x_-)$ 存在;

(2) 积分

$$\int_0^\delta \frac{f(x+u)-f(x_+)}{u}\mathrm{d}u, \qquad \int_0^\delta \frac{f(x-u)-f(x_-)}{u}\mathrm{d}u$$

绝对收敛, 则 f 的 Fourier 级数在点 x 处收敛于值 $\dfrac{f(x_+)+f(x_-)}{2}$.

证明基本上是应用 Riemann-Lebesgue 引理, 以及注意到函数 $\dfrac{1}{u} - \dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[0, \delta]$ 上的连续性. 下面我们以一个特殊情形加以证明, 这个情形对大多数应用是足够的.

定义 1 设 f 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 如果存在 $[a, b]$ 的划分

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b,$$

使得在每一个 $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 上定义的函数

$$f_i(x) = \begin{cases} f(t_{i-1_+}), & x = t_{i-1} \\ f(x), & x \in (t_{i-1}, t_i) \\ f(t_{i-}), & x = t_i \end{cases}$$

都是 $[t_{i-1},t_i]$ 上的可微函数, 则称 f 是分段可微函数.

定理 2 设 f 是周期为 2π 的一个分段可微函数, 则 $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$, f 的 Fourier 级数在 x 处收敛到 $\frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-))$.

证明 由前面的计算以及 $\frac{1}{u}-\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[0,\delta]$ 上的连续以及 Riemann-Lebesgue 引理有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2u}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x+u)-f(x_-)}{u}\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u\\ &\quad+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x-u)-f(x_+)}{u}\cdot\sin(n+\frac{1}{2})u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}(f(x_+)+f(x_-)).\end{aligned}$$

最后的等式是因为, 如果 f 分段可微, 则 $\frac{f(x+u)-f(x_-)}{u}$ 和 $\frac{f(x-u)-f(x_-)}{u}$ 关于 u 是分段连续 (可积) 的, 从而可以应用 Riemann-Lebesgue 引理.

前节例 1 和例 2 都满足上述定理的条件, 因此, 在例 1 中取 $x=1$ 就得到

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)}{2k+1},$$

在例 2 中取 $x=0$ 就得到

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k^2}.$$

下面接着举一些例子.

例 1 求函数 $f(x)=\cos\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 展开 (μ 不是整数).

解 把 f 延拓为 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的周期函数, 这是偶函数, 因此 $b_k=0$.

而

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\mu x\cdot\cos kx\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(\mu-k)x+\cos(\mu+k)x]\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\mu-k)\pi}{\mu-k}+\frac{\sin(\mu+k)\pi}{\mu+k}\right]=\frac{2\mu(-1)^k}{\pi}\frac{\sin\mu\pi}{\mu^2-k^2}\\
\Rightarrow\cos\mu x &= \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{\mu^2-n^2}\cos nx\right)\\
\Rightarrow\cos\mu\pi &= \frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-n^2}\right)\\
\Rightarrow\cot\pi\mu &= \frac{2\mu}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2-n^2}\right).
\end{aligned}
$$

当 $0\le\mu\le q<1$ 时, 上式关于 μ 一致收敛, 从而可逐项积分

$$\int_0^x(\cot\pi\mu-\frac{1}{\pi\mu})\mathrm{d}\mu=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-\frac{x^2}{n^2})$$

这就得到 $\sin\pi x$ 的下面的展开式, 有意思的是它和因式分解十分类似:

$$\sin\pi x=\pi x(1-\frac{x^2}{1^2})(1-\frac{x^2}{2^2})\cdot(1-\frac{x^2}{n^2})\cdots$$

在上式中令 $x=\frac{1}{2}$ 就得到 Wallis 公式:

$$\frac{\pi}{2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

例 2 类似地, 有

$$\sin\mu x=-\frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n\sin nx}{\mu^2-n^2}.$$

如果一个函数仅在 $(0,\pi)$ 上定义, 则我们可以首先将它延拓为周期为 2π 的函数, 然后再作 Fourier 展开. 常用的延拓有奇延拓和偶延拓, 即分别延拓为奇函数和偶函数.

例 3 把函数

$$f(x)=x,\ x\in(0,\pi)$$

分别作奇延拓和偶延拓, 然后分别求 Fourier 展开.

解 奇延拓: 令

$$f(x)=x,\ x\in(-\pi,0),$$

在 0 和 $\pm\pi$ 处规定 f 为 0. 则 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_k=0,\quad b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cdot\sin kx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}x\cdot\frac{-1}{k}\cos kx\Big|_0^\pi+\frac{2}{\pi}\Big|_0^\pi\frac{1}{k}\sin kx\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{k-1}\cdot\frac{2}{k} \end{aligned}$$

因此

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{\sin nx}{n},\ 0\le x<\pi.$$

偶延拓: 令

$$f(x)=-x,\ x\in(-\pi,0),$$

在 0 处 $f(0)=0$, 在 $\pm\pi$ 处 f 为 π, 则

$$\begin{aligned} b_k=0,\quad a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\mathrm{d}x=\pi \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos kx\mathrm{d}x=\frac{2}{k^2\pi}[(-1)^k-1] \end{aligned}$$

因此

$$x=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\ 0\le x\le\pi.$$

如果一个函数周期为 $2l$, 则和周期 2π 的情形类似, 令

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \qquad n=0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, \qquad n=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

则 f 有 Fourier 展开

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

通过变量替换 $t=\dfrac{\pi x}{l}$ 可以把周期 $2l$ 的函数变为周期 2π 函数, 因此容易看出, 定理 2 对于周期 $2l$ 的函数仍成立.

例 4 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, 且

$$f(x)=x^2,\ x\in[-1,1]$$

求其 Fourier 展开.

解 f 为偶函数, 因此 $b_k=0$. 而

$$\begin{aligned}a_0&=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},\\ a_n&=2\int_0^1 x^2\cdot\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n,\quad(\text{分部积分})\end{aligned}$$

这说明

$$x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\pi x,\ \forall x\in[-1,1].$$

如果作变量替代 $t=\pi x$, 则上式就是前节例 2 中的等式. 如果把此例和本节例 3 结合起来, 就得到如下等式:

$$(\bigstar)\quad x-\frac{x^2}{2\pi}=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2},\qquad 0\le x\le 2\pi$$

它当然也可以通过对 $f(x)=x-\dfrac{x^2}{2\pi}$, $0\le x\le 2\pi$ 作 Fourier 展开得到, 下一节我们将要用到这个等式.

§3 Parseval 恒等式

在前一节我们考虑了 Fourier 级数的逐点收敛性. 本节我们考虑积分意义下的收敛性, 这时对函数的要求较低.

设 $[a,b]$ 为闭区间, 我们定义函数集合 $R^2[a,b]$ 如下: $R^2[a,b]$ 中的函数 f Riemann 可积, 或 f 广义可积且 f^2 也广义可积. 显然, $R^2[a,b]$ 为线性空间, 且若 $f,g\in R^2[a,b]$, 则

$$\int_a^b |f\cdot g|\mathrm{d}x \le \left[\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}.\quad (\mathrm{Cauchy-Schwarz}\text{不等式})$$

定理 1 (Parseval 等式) 设 $f\in R^2[-\pi,\pi]$, 且 f 的 Fourier 展开为

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2). \tag{3.1}$$

下面我们以 f Riemann 可积为例给出证明, 一般情形的证明只需略作改动即可.

(1) 记

$$S_n(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

由三角函数系的正交性质, 有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(f)\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{a_0}{2})^2\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k^2\left(\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\right)\\ &= \frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\cdot S_n(f)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(f)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\left[\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f\mathrm{d}x+\sum_{K=1}^{n}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)\right.\\ &\quad \left.+b_k\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin k\mathrm{d}x\right]+\tfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(f)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\frac{2}{\pi}\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right]+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(f)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(f)\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{3.3}$$

由此得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)\mathrm{d}x \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2\mathrm{d}x, \tag{3.4}$$

且 (3.1) 成立

$$\Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(f)\mathrm{d}x \to \int_{-\pi}^{\pi} f^2\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2\mathrm{d}x \to 0. \tag{3.5}$$

(2) 由 (3.5) 知, 如果 (3.1) 对 $f, g \in R^2[a,b]$ 成立, 则对 $\lambda f + \mu g$ 也成立, 其中 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\lambda f + \mu g - S_n(\lambda f + \mu g)]^2\mathrm{d}x \leq 2\cdot\lambda^2 \int_{-\pi}^{\pi} [f - S_n(f)]^2\mathrm{d}x + 2\cdot\mu^2 \int_{-\pi}^{\pi} [g - S_n(g)]^2\mathrm{d}x \to 0.$$

(3) 显然, (3.1) 对常值函数成立. 下面考虑函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < a, \\ 1, & a \leq x \leq b, \\ 0, & b < x < \pi \end{cases}$$

将 φ 延拓为 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 函数, 其 Fourier 系数为

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(b-a) \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos kx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}(\sin kb - \sin ka) \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin kx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sin kx\mathrm{d}x = \frac{-1}{\pi}\cdot\frac{1}{k}(\cos kb - \cos ka) \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\left[(\sin kb - \sin ka)^2 + (\cos kb - \cos ka)^2\right] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}[1 - \cos k(b-a)] \\ &= \frac{1}{2\pi^2}(b-a)^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k(b-a)}{k^2} \\ &= \frac{b-a}{\pi} \qquad (\text{用到前一节最后的等式}(\bigstar)) \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

(4) 由 (2), (3) 知 (3.1) 对阶梯函数成立.

(5) 现在设 f 可积, 则 $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在阶梯函数 g 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x < \varepsilon$$

因为 (3.1) 对 g 成立, 故 n 充分大时

$$\int_{-\pi}^{\pi}[g-S_n(g)]^2\mathrm{d}x < \varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2\mathrm{d}x &\le 3\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[g-S_n(g)]^2\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(g-f)]^2\mathrm{d}x\right\}\\ &\le 3\left\{\varepsilon+\varepsilon+\int_{-\pi}^{\pi}(g-f)^2\mathrm{d}x\right\} \quad (\text{用}(3.4))\\ &\le 9\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f-S_n(f)]^2\mathrm{d}x \to 0,\ (n\to\infty)$$

即 (3.1) 对 f 成立.

推论 2 (广义 Parseval 等式) 设 $f, g \in R^2[-\pi,\pi]$, 则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\alpha_n+b_n\cdot\beta_n)$$

其中 a_n, b_n 是 f 的 Fourier 系数, α_n, β_n 是 g 的 Fourier 系数.

证明 分别对 $f+g$ 和 $f-g$ 应用 Parseval 等式, 然后二者相减即可.

推论 3 (惟一性) 设 f, g 为 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 如果 f 和 g 的 Fourier 系数相同, 则 $f \equiv g$.

证明 考虑 $f-g$, 其 Fourier 系数恒为 0, 由 Parseval 等式,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f-g)^2\mathrm{d}x = 0.$$

由 $f-g$ 连续知 $f\equiv g$.

推论 4 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 如果其 Fourier 展开一致收敛, 则其和必为 f.

证明 记其 Fourier 展开的和为

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则由一致收敛性知, 上式可逐项积分, 因此易见 $S(x)$ 的 Fourier 系数和 f 的 Fourier 系数相同. 由推论 3 知 $S(x)\equiv f(x)$.

例 1 由 §1 例 2 及 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\frac{2}{3}\pi^2)+\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{4}{k^2})^2$$

这就得到下面的等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

§4 Fourier 级数的积分和微分

我们首先说明, 可积函数的 Fourier 级数总是可以逐项积分的.

定理 1 (Reymond) 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 Riemann 可积, 其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

则对 $\forall\ [a,b]\subset[-\pi,\pi]$, 有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\mathrm{d}x.$$

证明 考虑 §3 中用到的函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b],\\ 0, & x\in[-\pi,a)\cup(b,\pi],\end{cases}$$

其 Fourier 系数记为 α_n,β_n, 则由广义 Parseval 等式, 有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\cdot\alpha_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\alpha_n+b_n\cdot\beta_n)$$

代入

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(b-a),$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \cos nx\mathrm{d}x,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_a^b \sin nx\mathrm{d}x,$$

即得欲证之等式.

为了考虑 Fourier 级数的微分, 我们先考虑一致收敛性.

定理 2 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上连续函数, 以 2π 为周期. 如果 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段可微, 且 f' Riemann 可积, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),\ \forall\ x\in[-\pi,\pi].$$

证明 根据前一节推论 4, 只要证明上式右边是一致收敛就可以了. 事实上, 记 f' 的 Fourier 系数分别为 a_n', b_n', 则

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)n\cdot\sin nx\mathrm{d}x = n\cdot b_n$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot n\cos nx\mathrm{d}x = n\cdot a_n$$

由 f' Riemann 可积知

$$\frac{1}{2}(a_0')^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n')^2 + (b_n')^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f')^2\mathrm{d}x$$

另一方面, 我们有估计

$$\begin{aligned}
|a_n\cos nx + b_n\sin nx| &= (|a_n| + |b_n|) \\
&= \frac{1}{n}|a_n'| + \frac{1}{n}|b_n'| \\
&\le \frac{1}{2}\left[(\frac{1}{n^2} + |a_n'|^2) + (\frac{1}{n^2} + |b_n'|^2)\right]
\end{aligned}$$

从而 f 的 Fourier 展开的确是一致收敛的.

定理 3 设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上 1 阶连续可微, 以 2π 为周期, 且 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上逐段可微, f'' Riemann 可积, 则 f 的 Fourier 展开

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可在 $[-\pi,\pi]$ 上逐次求导:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),$$

且上式右边的级数是一致收敛的.

证明 应用定理 2 和 "函数项级数" 那一章 §2 定理 2 即可.

应用定理 2 我们可以用三角多项式去一致地逼近连续函数.

定理 4 (Weierstrass) 设 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的连续函数, 周期 2π, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在三角多项式 $T(x)$, 使得

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon,\ \forall\,x\in[-\pi,\pi].$$

证明 首先, 连续函数 f 可以用分段线性函数一致逼近. 即存在周期为 2π 的分段线性函数 g, 使得

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall x\in[-\pi,\pi].$$

其次, g 满足定理 2 的条件, 故其 Fourier 展开一致收敛于 g. 即 n 充分大时

$$|g(x)-S_n(g)(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\,x\in[-\pi,\pi]$$

这说明

$$|f(x)-S_n(g)(x)|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-S_n(g)(x)|<\varepsilon.$$

推论 5 f 为 $[-\pi,\pi]$ 上周期 2π 的连续函数, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon,\ \forall\,x\in[-\pi,\pi].$$

证明 由定理 4, 存在三角多项式 $T(x)$ 使得

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\,x\in[-\pi,\pi].$$

由于三角函数的 Taylor 展开都是一致收敛的, 从而存在多项式 $P(x)$ 使得

$$|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

这说明

$$|f(x)-P(x)|\le|f(x)-T(x)|+|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

推论 6　f 为 $[a,b]$ 上的连续函数, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得

$$|f(x)-P(x)|\le\varepsilon,\ \forall\, x\in[a,b].$$

证明　利用线性变换 $t=\dfrac{\pi}{b-a}(x-a)$ 把 $[a,b]$ 上的函数变为 $[0,\pi]$ 上的函数. 对此函数以 2π 为周期作偶延拓, 然后利用推论 5 即可, 注意线性变换把多项式仍变成多项式.

例 1　设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　把偶函数 $|\cos t|$ 作 Fourier 展开:

$$|\cos t|=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nt,\qquad t\in\mathbb{R}.$$

上式一致收敛, 可作逐项积分:

$$\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cdot u_n(\lambda).$$

其中

$$u_n(\lambda)=\int_a^b f(x)\cos 2n\lambda x\mathrm{d}x,\qquad n=1,2,\cdots.$$

由 Riemann-Lebesgue 引理, $u_n(\lambda)\to 0$ $(\lambda\to+\infty)$, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}u_n(\lambda)$ 一致收敛, 故令 $\lambda\to+\infty$, 逐项求极限即得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)|\cos\lambda x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

§5 Fourier 变换初步

Motivation: 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数如何像周期函数那样作展开?

假定 f 满足适当的条件, 则在有限的区间 $[-l,l]$ 上, f 可展开为 Fourier 级数:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad(n=0,1,2,\cdots),$$
$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,\qquad(n=1,2,\cdots)$$

这说明

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}(x-t)\mathrm{d}t.$$

如果 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 则令 $l\to+\infty$, 上式可写为

$$f(x)\to\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda$$

因此, 在一定的条件下, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\lambda \tag{5.1}$$

或

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\sin\lambda x\right]\mathrm{d}\lambda \tag{5.2}$$

其中

$$a(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,\quad b(\lambda)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

(5.1) 和 (5.2) 称为 f 的 Fourier 积分公式, 其右端称为 Fourier 积分, $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ 相当于 Fourier 系数.

当然, (5.1), (5.2) 的推导只是形式推导. 和 Fourier 级数一样, 要建立 (5.1) 那样的等式, 必须仔细考虑收敛性. 下面我们叙述一些相应的结果, 而把大多数的证明放到以后的课程.

引理 1 如果 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 则 $a(\lambda),b(\lambda)$ 关于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 一致连续, 且 $\lambda\to\infty$ 时, $a(\lambda)\to 0$, $b(\lambda)\to 0$.

证明 由 f 的条件知, $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists A>0$, 使得

$$\int_{-\infty}^{-A}|f(t)|\mathrm{d}t+\int_{A}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

记 $M=\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t+1$, 由于 $\cos x$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 故 $\exists\,\eta>0$, 使得 $|x'-x''|<\eta$ 时

$$|cosx'-\cos x''|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

于是当 $|\lambda'-\lambda''|<\dfrac{\eta}{A}$ 时,

$$\begin{aligned}|a(\lambda')-a(\lambda'')| &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\cdot|(\cos\lambda' t-\cos\lambda''(t)|\mathrm{d}t\\ &\le \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-A}2\cdot|f(t)|\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{A}^{+\infty}2\cdot|f(t)|\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}|f(t)||\cos\lambda' t-\cos\lambda'' t|\mathrm{d}t\\ &\le \frac{2}{\pi}\varepsilon+\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{M}\int_{-A}^{A}|f(t)|\mathrm{d}t<\frac{3}{\pi}\varepsilon<\varepsilon.\end{aligned}$$

对 $g(\lambda)$ 有类似的证明. 同时

$$\limsup_{\lambda\to\infty}|a(\lambda)|\le\varepsilon+\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\left|\int_{-A}^{A}f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t\right|=\varepsilon$$

这说明 $a(\lambda)\to 0$, $\lambda\to\infty$. 同理, $b(\lambda)\to 0$, $\lambda\to\infty$.

引理 2 记

$$S(A,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{A}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t,$$

f 条件同上, 则

$$S(A,x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t.$$

证明 在 "含参变量积分" 那一章中将证明积分次序的可交换性, 现在我们先承认这一点, 此时

$$\begin{aligned}S(A,x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^A \mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_0^A f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\frac{\sin A(x-t)}{x-t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

引理 3 $\forall\,\delta>0$, 有

$$\lim_{A\to+\infty}\int_\delta^A [f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin At}{t}\mathrm{d}t=0.$$

证明 和引理 1 中 $a(\lambda)\to 0$ 的证明完全类似, 故略去.

引理 3 说明, $\lim\limits_{A\to+\infty} S(A,x)$ 只与 f 在 x 附近的性质有关. 因此, 与 Fourier 级数类似, 我们有 Dini 判别法, 这里只叙述一个特殊情形:

定理 4 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 中可积且绝对可积, 如果 f 分段可微, 则

$$\begin{aligned}\frac{f(x+)+f(x_-)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty}[a(\lambda)\cos\lambda x+b(\lambda)\cos\lambda x]\mathrm{d}\lambda\end{aligned}$$

其中

$$a(\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,\quad b(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t.$$

如果 f 满足上述条件的连续偶函数, 则积分公式可写为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t,\quad \text{(Foruier余弦公式)}$$

类似地, f 为奇函函数时

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t,\quad \text{(Fourier正弦公式)}.$$

例 1 计算函数 $f(x)=e^{-\beta x}$ $(\beta>0, x>0$ 的 Fourier 余弦公式和正弦公式.

解

$$\int_0^{+\infty} f(t)\cos\lambda t\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\cdot\cos\lambda t\mathrm{d}t=\frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}\quad(\text{分部积分})$$

由余弦公式 $\Rightarrow$

$$e^{-\beta x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\lambda^2}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda,\qquad(\beta>0, x\geq 0)$$

同理,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin\lambda t\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\cdot\sin\lambda t\mathrm{d}t=\frac{\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\quad(\text{分部积分})$$

由正弦公式 $\Rightarrow$

$$e^{-\beta x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda}{\beta^2+\lambda^2}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda\qquad(\beta>0, x>0$$

从而得到如下积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha t}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+t^2}\sin\alpha t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}e^{-\alpha},\quad\alpha>0.$$

令 $i=\sqrt{-1}$, 则 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$.

定义 1 (Fourier 变换) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可积且绝对可积, 令

$$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t,\qquad w\in\mathbb{R}$$

称 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换.

Fourier 积分公式可以改写成复数形式: 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 为偶函数, 故 Fourier 积分可写为

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\lambda(x-t)\mathrm{d}t$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 为奇函数, 故 (至少在主值意义下)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\lambda(x-t)\mathrm{d}t=0$$

因此

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda(x-t)}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)e^{i\lambda x}\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

我们不加证明地列举 Fourier 变换的一些性质:

(1) $|\hat{f}(w)| \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$, $\forall\ w \in \mathbb{R}$; 且 $\hat{f}(w) \to 0,\ w \to \infty$.

(2) $\lambda \cdot \widehat{f + \mu} \cdot g) = \lambda \cdot \hat{f} + \mu \cdot \hat{g},\ \forall\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$;

(3) $\hat{f}$ 为连续函数;

(4) $\hat{f}'(w) = i \cdot w \cdot \hat{f}(w),\ \forall\ w \in \mathbb{R}$;

(5) $\widehat{f * g}(w) = \hat{f}(w) \cdot \hat{g}(w)$, 其中

$$f * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t) \cdot g(t)\mathrm{d}t,$$

称为 f 和 g 的卷积.